2025 年度

佐賀大学大学院入学試験問題

一般入試

理工学研究科

物理学コース

力学、電磁気学

—————————————— 解答上の注意事項 ——————————————

1　「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。

2　「解答始め」の合図があったら，全ての解答紙の所定欄に受験番号を記入すること。

3　力学と電磁気学の解答は，それぞれ別の解答用紙に記入すること。

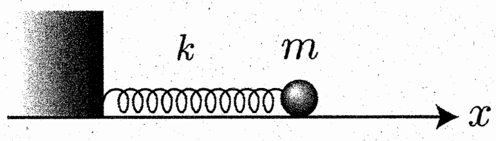
4　試験時間中，試験問題の内容について質問がある場合は，手をあげて監督者に申し出ること。

5　その他，監督者の指示に従うこと。

科目名	力学

物理学 コース

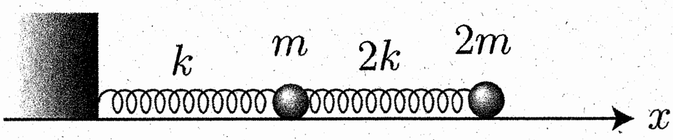
下の図のように，質量の無視できるバネ定数が k のバネの一端を壁に固定し，他端に質量 m の大きさを無視できる小球を取り付け，滑らかな水平面上で運動できるようにする。このとき，以下の問いに答えよ。



(1) バネが自然長である時の小球の位置を基準とし，バネが伸びる方向を正とする小球の変位を x とする。$x(t)$ を力学変数として小球の運動方程式を書け。

(2) (1) の運動方程式の解で，$t = 0$ における初期条件，$x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = v$ を満たすものを書け。

次に下の図のように，質量 m の小球に，さらに質量の無視できるバネ定数 $2k$ のバネを付け，他端に質量 $2m$ の大きさを無視できる小球を付ける。２つのバネと小球は，滑らかな水平面上を１つの直線に沿って運動する。このとき，以下の問いに答えよ。



(3) ２つのバネが自然長である時のそれぞれの小球の位置を基準とし，バネが伸びる方向を正として，質量 m の小球の変位を x_1，質量 $2m$ の小球の変位を x_2 とする。$x_1(t)$ と $x_2(t)$ を力学変数としてこの系のラグランジアンを書け。

(4) $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が従う運動方程式を書け。

(5) この系の固有角振動数を全て求めよ。

(6) (5) で求めた固有角振動数のうち，最も小さな角振動数を持つ固有振動の振幅を求めよ。

科目名	電磁気学

物理学　コース

[I]　z 方向に間隔 d だけ離れた位置$(0,0,\frac{d}{2})$と$(0,0,-\frac{d}{2})$にそれぞれ点電荷 q, $-q$ が置かれている。以下の問いに答えよ。

(1) 原点から距離 r 離れている位置(x,y,z)のポテンシャル $\varphi(x,y,z)$ を求めよ。ここで$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$である。ただし、無限遠をポテンシャルの基準点とする。

(2) 電荷から十分遠い位置$(r \gg d)$において、$p=qd$ として q と d を使わずにポテンシャル $\varphi(x,y,z)$を示せ。ただし、$|t|$が 1 に比べて十分小さいときに成立する近似的な関係$(1+t)^{\alpha}=1+\alpha t$を用いよ。

(3) (2)の結果を使って、電荷から十分遠い位置での電場の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。

[II]　図１のように、外半径 R_1、内半径 R_2 の無限に長い中空共軸円筒導体を、定常電流 I が紙面に垂直な z 軸方向に沿って一様な密度で流れている。直断面内において半径 R_1 の円の中心を原点 O とする。以下の問いに答えよ。

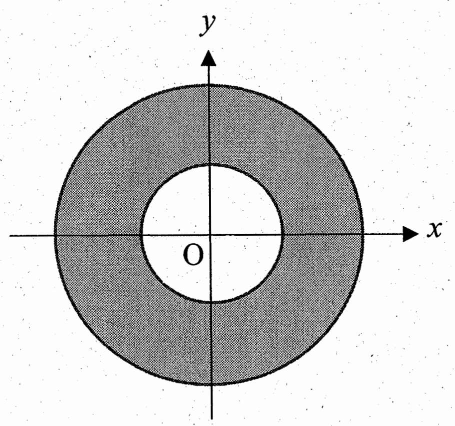


図１

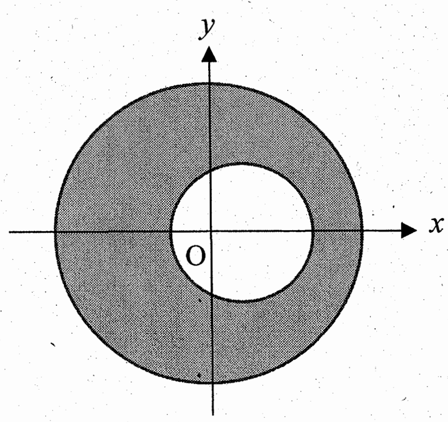


図２

(1) 円筒の中空部分で、中心軸から距離 r 離れた位置での磁束密度の大きさを求めよ。

(2) 導体の中で中心軸から距離 r 離れた位置での磁束密度の大きさを求めよ。

図２のように、直断面の中空部分の中心が x 軸方向に d だけ離れているとする（$d < R_1 - R_2$）。定常電流 I が一様な密度で導体を流れている。

(3) 中空部分で位置$(a, 0, 0)$での磁束密度の大きさを求めよ。

2025 年度

佐賀大学大学院入学試験問題

一般入試

理工学研究科

物理学コース

量子力学、統計力学

―――――――――――― 解答上の注意事項 ――――――――――――

1　「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。

2　「解答始め」の合図があったら，全ての解答紙の所定欄に受験番号を記入すること。

3　量子力学と統計力学の解答は，それぞれ別の解答用紙に記入すること。

4　試験時間中，試験問題の内容について質問がある場合は，手をあげて監督者に申し出ること。

5　その他，監督者の指示に従うこと。

科目名	量子力学

物理学 コース

[I] 1次元空間でポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq L) \\ \infty & (L < x) \end{cases}$$

のもとで運動する質量 m の粒子を考える。エネルギー固有関数 $\psi(x)$ は以下の時間に依存しないシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

に従う。ここで，E はエネルギー固有値，$\hbar$ はプランク定数 h により $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ で与えられる定数である。以下の問いに答えよ。

(1) 領域 $0 \leq x \leq L$ で $\psi(x)$ が満たすシュレーディンガー方程式を解き，$\psi(x)$ の一般解を求めよ。必要な定数は適宜定義せよ。

(2) エネルギー固有関数 $\psi(x)$ に対する境界条件は $\psi(0) = \psi(L) = 0$ と書くことができる。このとき，規格化条件 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx = 1$ をみたす $\psi(x)$ を求めよ。解答の際，必要であれば，自然数は n とせよ。

(3) この定常状態のエネルギー固有値を求めよ。

(4) 基底状態と第1励起状態のエネルギー固有関数の概形を図示せよ。

[II] 質量 m, 角振動数 ω の1次元調和振動子を考える。ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{HO}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2(t) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2(t)$$

と書ける。ここで，$\hat{q}(t), \hat{p}(t)$ はそれぞれ粒子の座標，運動量を表す演算子である。$\hat{q}(t), \hat{p}(t)$ の間には同時刻で交換関係 $[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ が成り立っている。$\hbar$ はプランク定数 h により $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ で与えられる定数である。以下の問いに答えよ。

(1) 演算子 $\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)$ を以下のように定義する：

$$\hat{a}(t) = \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hat{p}(t) - im\omega\hat{q}(t)\right), \qquad \hat{a}^\dagger(t) = \frac{-i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hat{p}(t) + im\omega\hat{q}(t)\right)$$

このとき，$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)]$ を求めよ。

(2) ハミルトニアン $\hat{H}_{\rm HO}$ が $\hat{a}(t)\,,\hat{a}^\dagger(t)$ を用いて

$$\hat{H}_{\rm HO} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2}\right)$$

と書けることを示せ。

(3) 系のハミルトニアン $\hat{H}$ が与えられた際，演算子 $\hat{F}(t)$ の時間発展は以下のハイゼンベルク方程式

$$\frac{d\hat{F}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}(t),\hat{H}]$$

に従う。ハミルトニアン $\hat{H}_{\rm HO}$ で与えられる系において，$\hat{a}(t),\hat{a}^\dagger(t)$ に対するハイゼンベルク方程式が

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega\,\hat{a}(t)\,, \qquad \frac{d\hat{a}^\dagger(t)}{dt} = i\omega\,\hat{a}^\dagger(t)\,,$$

と書けることを示せ。

(4) (3) における $\hat{a}(t),\hat{a}^\dagger(t)$ に対するハイゼンベルク方程式の解は，初期条件を $\hat{a}(0)=\hat{a}_0\,,\hat{a}^\dagger(0)=\hat{a}_0^\dagger$ とすると，$\hat{a}(t)=\hat{a}_0e^{-i\omega t}\,,\hat{a}^\dagger(t)=\hat{a}_0^\dagger e^{i\omega t}$ と書ける。このとき，$\hat{q}(t)\,,\hat{p}(t)$ を $\hat{a}_0,\hat{a}_0^\dagger$ を用いて表せ。

(5) 異なる時刻での $\hat{q}(t)$ の交換関係 $[\hat{q}(t),\hat{q}(t')]$ を求めよ。

科目名	統計力学

物理学　　　コース

分子数 N の単原子分子理想気体が，容積 V の容器に入っており，温度 T の熱平衡状態にある。分子の質量が m であるとき，この理想気体の分配関数 Z は次のように書ける。

$$Z = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}}$$

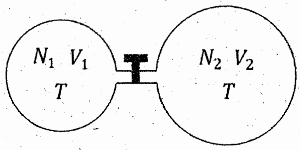
ここで，h はプランク定数，k はボルツマン定数である。以下では，スターリングの公式による近似を使わないこと。

(1) この理想気体の内部エネルギー U を求めよ。

(2) この理想気体のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

(3) この理想気体のエントロピー S を求めよ。

図のような容器に，栓を閉じた状態で，質量の異なる2種類の単原子分子理想気体を容器のそれぞれの部分に封じ込めた。容積 V_1 の部分には，質量 m_1 の分子が N_1 個入っており，容積 V_2 の部分には，質量 m_2 の分子が N_2 個入っている。ともに温度は T であり，圧力も等しい。



続いて，容器の栓を開いた。温度は T のままであった。

(4) V_2 を，N_1, N_2, V_1 を用いてあらわせ。

(5) 開栓後の気体の分配関数 Z を，V_2 を含まない形で書け。

(6) 開栓前後の気体のエントロピー変化を，N_1, N_2, k を用いてあらわせ。

(7) この変化の可逆性，または，不可逆性について理由をつけて述べよ。