

前期日程

令和 5 年度入学試験問題（前期日程）

# 数 学

（理工学部）

————— 解答上の注意事項 —————

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
2. 問題冊子 1 冊および解答紙 4 枚がある。解答紙は 1 枚ずつ切り離して使用すること。
3. 問題は 1 から 4 まで 4 問ある。各問の解答は所定の解答紙にのみ記入すること。
4. 解答は、できるだけ解答紙の表面にすべて書くこと。やむを得ず解答紙の裏面を使う場合は、表面の右下に「裏面に続く」と書き、解答の続きを裏面の仕切り線の下に記入すること。
5. 解答しない問題がある場合でも、解答紙 4 枚すべてを提出すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

- 1 四面体 OABC において、 $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  をそれぞれ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  とおく。これらは

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = \sqrt{3}$$

および

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

を満たすとする。頂点 O から  $\triangle ABC$  を含む平面に垂線を引き、交点を H とする。次の問に答えよ。

- (1)  $|\overrightarrow{AB}|^2$ ,  $|\overrightarrow{AC}|^2$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 実数  $s, t$  により  $\overrightarrow{AH}$  が  $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$  と表されるとき、 $\overrightarrow{OH}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $s, t$  を用いて表せ。
- (3) (2) の  $s, t$  の値をそれぞれ求めよ。
- (4) 四面体 OABC の体積を求めよ。



2 0 から 3 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚のカードを取り出し、数字を確認してからもとへもどす。これを  $n$  回くり返したとき、取り出されたカードの数字の総和を  $S_n$  で表す。 $S_n$  が 3 で割り切れる確率を  $p_n$  とし、 $S_n$  を 3 で割ると 1 余る確率を  $q_n$  とするとき、次の問に答えよ。

(1)  $p_2$  および  $q_2$  の値を求めよ。

(2)  $p_{n+1}$  および  $q_{n+1}$  を  $p_n$ ,  $q_n$  を用いて表せ。

(3)  $p_n$  および  $q_n$  を  $n$  を用いて表せ。また、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$  を求めよ。



**3**  $a, b, c, d$  は実数とし,  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  を  $f(x)$  とおく。4 次方程式  $f(x) = 0$  が 2 つの実数解  $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$  および 2 つの虚数解  $\alpha, \beta$  を持つとする。次の問に答えよ。

- (1) 整式  $f(x)$  は  $x^2 - 6$  で割り切れることを示せ。
- (2)  $\alpha + \beta, \alpha\beta, c, d$  を  $a, b$  を用いて表せ。
- (3) 複素数平面上において点  $A(\alpha), B(\beta), C(-\sqrt{6})$  が同一直線上にあるとき,  $a$  の値を求めよ。
- (4) (3) において, さらに点  $A(\alpha), B(\beta), D(\sqrt{6})$  が正三角形の 3 つの頂点となるときの,  $b$  の値を求めよ。



4

次の問に答えよ。

(1) 等式  $(\tan \theta)' = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  を示せ。また、定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$  の値を求めよ。

(2) 等式

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$$

を示せ。また、定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta$  の値を求めよ。

(3) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta$  の値を求めよ。