$\boxed{\text{前期日程}}$

平成30年度入学試験問題（前期日程）

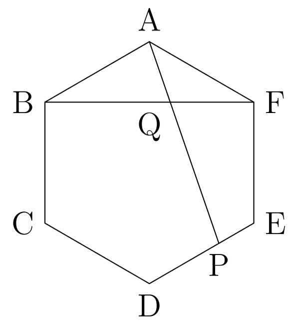
数　学

（理工学部）

―――――― 解答上の注意事項 ――――――

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
2. 問題冊子1冊および解答紙4枚がある。解答紙は1枚ずつ切り離して使用すること。
3. 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ まで4問ある。各問の解答は所定の解答紙にのみ記入すること。
4. 解答紙の裏面を使う場合は，続きの解答を裏面の仕切り線の下に記入すること。
5. 解答しない問題がある場合でも，解答紙4枚すべてを提出すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 下の図のような 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF において，線分 DE を 2 : 1 に内分する点を P とし，直線 AP と直線 BF の交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \dfrac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

で定められているとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 4 つの有理数 p，q，r，s が

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

を満たすとする。このとき，$p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい。

(2) 不等式

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$$

が成立することと，$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$（p_n および q_n は有理数）と表されることを n に関する数学的帰納法を用いて示せ。

(3) (2) で定義された数列 $\{p_n\}$ に対して，p_{n+1} と p_n が満たす関係式，および一般項 p_n を求めよ。

$\boxed{3}$ $f(x)=xe^{-x}$ とする。O$(0,0)$，P$(t,0)$，Q$(t,f(t))$，R$(4,0)$ とする。ただし，$0<t<4$ とする。△PQR の面積を $S_1(t)$ とし，線分 OQ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする。$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$ とおく。このとき，次の問に答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。ただし，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ は用いてよい。

(2) $S_1(t)$ を t を用いて表せ。

(3) $S_2(t)$ を t を用いて表せ。

(4) $S(t)$ の極値を求めよ。

$\boxed{4}$ 曲線 $C\colon y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, \log t)$ をとる。ただし，点 P および原点を通る直線と点 P における曲線 C の接線が垂直に交わっているものとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\log t$ を t についての整式で表せ。

(2) $0 < x < 1$ の範囲で不等式

$$2\log x < -x^2 + 4x - 3$$

が成立することを示せ。

(3) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1}$ とおく。$S = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ となるような t についての整式 $f(t)$, $g(t)$ を一組求めよ。また，$S > 1.1$ となることを示せ。